PDF ins INTERNET

Einleitung

- Jakob Bernoulli lebte von 1654- 1705. Er war einer der bedeutendsten Mathematiker des 17. Jahrhunderts. Zunächst studierte er auf Wunsch seines Vaters Theologie, nach dem Abschluss seines Studiums widmete er sich jedoch immer mehr seiner wahren Liebe, der Mathematik und Astronomie und brachte sich seine mathematischen Kenntnisse Großteils selber bei. Im Jahre 1687 wurde er zum Professor an der Uni Basel ernannt, den Lehrstuhl behielt er bis zu seinem Tod.

- Jakob Bernoulli entstammt einer Gelehrtenfamilie, die vom 17. Jahrhundert bis heute viele berühmte Wissenschaftler und Künstlerhervorgebracht hat.

- Jakob hatte einen jüngeren Bruder, Johann. Die mathematischen Leistungen der Brüder Bernoulli so eng miteinander verflochten sind, dass man über den einen nicht schreiben kann, ohne den anderen zu nennen.

PDF ins INTERNET

noullis

Entdeckungen und Arbeitsschwerpunkte

Analysis

Beiträge zur Infinitesimal-und Variationsrechnung

Die Infinitesimalrechnung ist wesentlicher Bestandteil der Analysis, einem Teilgebiet der Mathematik. Sie wurde unabhängig voneinander von Gottfried Wilhelm Leibniz und Isaac Newton entwickelt und ist heute zentrales Hilfsmittel in Natur- und . Jakob Bernoulli hat für die Mathematik auf verschiedenen Gebieten bedeutende Beiträge geliefert. Er war einer der ersten, die die Infinitesimalrechnung von Leibniz verstanden und weiterentwickelten. Von ihm stammt der Begriff Integral. Nach ihm sind die Bernoulli-Zahlen benannt, eine Folge rationaler Zahlen, die in der Mathematik in verschiedenen Zusammenhängen auftreten. Die Bernoulli´sche Ungleichung ist ein elementares aber wichtiges Hilfsmittel der Analysis. Er begründete die Variationsrechnung und untersuchte dabei wichtige Kurven und Differentialgleichungen.

Man verdanke in der Förderung der modernen Analysis den Brüdern Bernoulli gleich viel wie Leibniz und Newton.

Die Infinitesimalrechnung befasst sich mit mathematischen Funktionen und untersucht das Verhalten dieser Funktionen auf kleinsten Intervallen.

Die Infinitesimalrechnung liefert eine Methode durch Bildung geeigneter Grenzwerte die Funktion auf beliebig kleinen (d.h. infinitesimalen) Abschnitten widerspruchsfrei zu beschreiben (Frühe Versuche unendlich kleine Intervalle quantitativ zu fassen waren an Widersprüchen gescheitert.)

Was ist Integralrechnung?

Ein Integral ist im Grunde nichts anderes als die Fläche unter einer Funktion, und zwar zwischen zwei Punkten auf der x-Achse. In Bild 1 ist dies exemplarisch zu sehen:

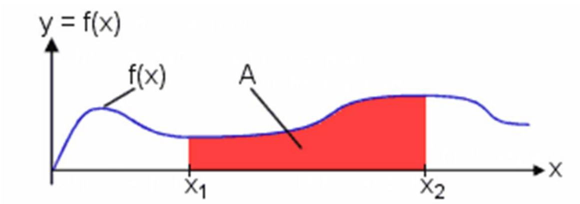


Bild 1: Integral einer Funktion

PDF
ins INTERNET

ach die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion f(x).Mathematisch schreibt sich das Ganze so:

$$A = \int_{x1}^{x2} f(x)\, dx$$

Diese Gleichung besagt dass, die Fläche A sich aus dem Integral der Funktion f(x) zwischen x1 und x2 berechnet. Die geschwungene Linie ist das Integralzeichen .Das "dx" beschreibt, nach welchem Wert integriert werden soll; hier ist es x.

Man kann als Annäherung die x-Achse zwischen x1 und x2 in viele gleichgroße Teile Δx aufteilen und dann für jeden Teilbereich Δx das Produkt aus f(x) und Δx berechnen, wodurch sich jeweils die Fläche eines Rechtecks ergibt.

In Bild 2 ist dies exemplarisch für einen Wert dargestellt:

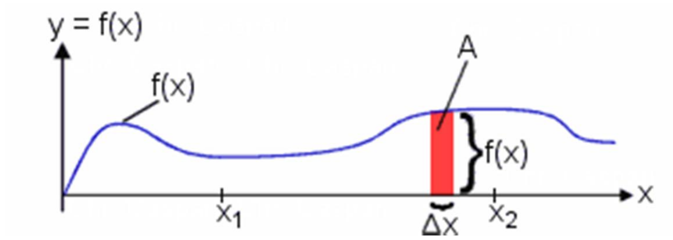


Bild 2: Integralannäherung einer Funktion

Wenn man die einzelnen Flächen zusammenrechnet, erhält man als Ergebnis die Gesamtfläche unter dem Funktionsgraphen zwischen x1 und x2.

Da sich durch die endliche Breite der Rechtecke kein glatter Funktionsverlauf sondern ein treppenförmiger Verlauf ergibt, der immer ein bisschen vom wahren Verlauf abweicht, handelt es sich nur um eine Näherung. Den Fehler kann man aber dadurch verringern, indem man die Breite Δx der Rechtecke sehr klein wählt, damit auch die Stufen und damit die Abweichung von der realen Funktion klein werden. Wenn man den Bereich zwischen x1 und x2 in unendlich viele Teile unterteilt, wird die Breite **infinitesimal** klein. Dadurch werden die **Stufen ebenfalls infinitesimal klein und damit der Fehler Null**.

Beispiel

PDF ins INTERNET

…erentialquotient? +Beispiel

Das Differential bzw. der Differentialquotient ist nichts anderes als die Steigung einer Funktion in einem bestimmten Punkt.

In Bild 1 ist dies am Beispiel einer Funktion f(x) dargestellt. Hier ist die Steigung am Punkt P = f(x1) als rote Gerade eingezeichnet.

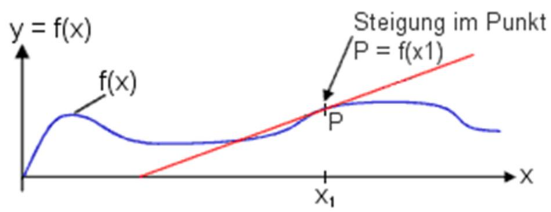


Bild 1: Ableitung in einem Punkt

Die Steigung dieser rot dargestellten Gerade repräsentiert den Differentialquotienten im Punkt x1. Wenn man für jeden Punkt der Funktion f(x) die Steigung bestimmt, erhält man eine Funktion f'(x), die man als Ableitung der Funktion f(x) bezeichnet. Man beachte den Apostrophen, der die Ableitung einer Funktion kennzeichnet. Mathematisch schreibt sich das Ganze so:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Der Differentialquotient (=Ableitung) ist also nichts anderes als eine Funktion, die die Steigung einer anderen Funktion in jedem Punkt beschreibt. Das bedeutet, dass für jedes x die Funktion f'(x) die Steigung der Funktion f(x) für genau dieses x liefert.

$$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

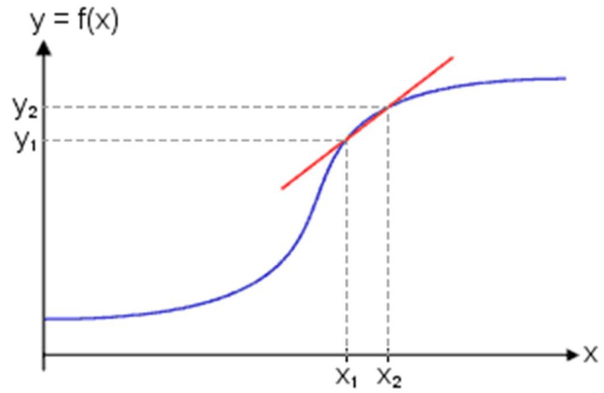


Bild 2: Sekante an einer Funktion

PDF ins INTERNET

ch ist, d.h. man bekommt lediglich die mittlere
er zwischen x1 und x2 liegt. Die echte Steigung für einen einzigen Punkt bekommt man, indem man das Δ sehr, sehr klein wählt. Mathematisch nicht ganz korrekt sagt man umgangssprachlich oft "unendlich klein", denn dann nähert sich x2 beliebig nahe an x1 an. Die Differenz zwischen x2 und x1 wird so infinitesimal klein (="unendlich klein"), aber sie wird nicht Null. Die Differenz y2 - y1 wird dabei zwar auch infinitesimal klein, aber der Quotient aus diesen beiden extrem kleinen Zahlen repräsentiert exakt die Steigung. Die Steigung kann dabei beliebige Werte annehmen, also auch Null sein oder negative Werte annehmen.

Wenn man eine Differenz Δ infinitesimal klein wählt, verwendet man dafür in der Mathematik den Buchstaben d, angelehnt an die Bezeichnung Differential, die man für "unendlich kleine" Differenzen verwendet. Somit ändert sich die Schreibweise von Δy bzw. Δy in dx bzw. dy, womit wir bei der schon oben gezeigten Schreibweise angelangt sind:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Man sagt auch, dass man y nach x differenziert.

Beispiel

Das Integral hat schon allein deshalb eine wichtige Bedeutung, da es das Gegenstück zur Ableitung ist! Machen wir dies am dem Beispiel des Autofahrers fest. Haben wir von einem Autofahrer also die Gleichung, die die Geschwindigkeit des Autos während der Fahrt angibt, so können wir hier mit dem Integral die zurückgelegte Strecke bestimmen. Nehmen wir also beispielsweise das Integral der Geschwindigkeitsfunktion von 0 bis 1h, dann erhalten wir die währenddessen zurückgelegte Strecke, was ziemlich hilfreich ist!

PDF ins INTERNET

B. s Hauptwerk « Ars Conjectandi » (= Kunst des Vermutens/Mutmaßens)

Bernoullis Hauptwerk wurde erst nach seinem Tod veröffentlicht. Dort untersucht Bernoulli Zufallsprozesse und wie man das Ergebnis statistisch vorhersagen (mutmaßen) kann. Das Buch hat der Formalisierung der Stochastik, das heißt der Lehre vom Zufall, Auftrieb gegeben.

- Über das Werk:
- Das Werk baut auf die Wahrscheinlichkeitstheorien von Hyugens, Cardano etc. auf
- Beschäftigt sich mit der Wahrscheinlichkeitstheorie, ist aber nicht nur die Wissenschaft von Glückspielen sondern von allgemeinen rationalen Vermutungen
- Somit ist Ars Conjectandi wegweisend für die Wahrscheinlichkeitstheorie
- Beweis und Formulierung des Gesetzes der großen Zahlen
- Weiterentwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie

Das Bernoulli - Experiment

Als Bernoulli - Experiment bezeichnet man ein Zufallsexperiment, bei denen sich genau zwei Elemente in der Ergebnismenge befinden. Wir haben also einen Zufallsversuch, das nur zwei Ergebnisse kennt.

Wirft man eine Münze und notiert die Folge der Resultate (Kopf oder Zahl, das heißt "K" oder "Z"), so führt man Bernoulli-Versuche durch.

Beispiel:

- Eine Münze wird geworfen. Die Münze kann auf Kopf oder Zahl fallen, es gibt somit nur zwei mögliche Ergebnisse. Es liegt ein Bernoulli-Experiment vor.

Die Summe der beiden Möglichkeiten bei einem Bernoulli-Experiment muss **stets 1 betragen**. Für die Münze hat sowohl das Wappen als auch die Zahl die Wahrscheinlichkeit 0,5.

Einer der Versuchsausgänge wird meistens mit *Erfolg* bezeichnet und der komplementäre Versuchsausgang mit *Misserfolg*. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit p für einen Erfolg nennt man Erfolgswahrscheinlichkeit und $q = 1 - p$ die Wahrscheinlichkeit eines Misserfolgs.

PDF ins INTERNET

- Werfen einer Münze: Kopf (Erfolg), $p = 1/2$, und Zahl (Misserfolg) $q = 1/2$.
- Werfen eines Würfels, wobei nur eine „6“ als Erfolg gewertet wird: $p = 1/6$, $q = 5/6$
- Qualitätsprüfung (einwandfrei, nicht einwandfrei).
- Anlagenprüfung (funktioniert, funktioniert nicht).
- Betrachte sehr kleines Raum/Zeit-Intervall: Ereignis tritt ein $(p \gtrapprox 0)$, tritt nicht ein $(q \lessapprox 1)$

Definition

Eine diskrete Zufallsgröße X mit Werten in der Menge $\{0, 1\}$ unterliegt der *Null-Eins-Verteilung* bzw. *Bernoulli-Verteilung* mit dem Parameter $p \in]0, 1[$ wenn sie die folgenden Einzelwahrscheinlichkeiten besitzt.

$\mathrm{P}(X = 1) = p$ und $\mathrm{P}(X = 0) = q = 1 - p$.

Die Bernoulli - Kette

Wird ein Bernoulli - Experiment immer mit denselben Bedingungen n-mal hintereinander durchgeführt, so spricht man von einer Bernoulli - Kette.

Beispiel:

Eine Münze wird 20mal hintereinander geworfen. Wir haben somit ein Bernoulli - Experiment, welches n = 20-mal hintereinander durchgeführt wird.

PDF ins INTERNET

cheinlichkeit für einen **Bernoulli-Prozess** sagen. Man interessiert sich also nur dafür, ob ein bestimmtes Ereignis eintritt oder nicht. Eine weitere Voraussetzung ist, dass sich die Wahrscheinlichkeit *p* nicht verändern darf und das die Einzelexperimente stochastisch voneinander unabhängig seien müssen. Die Bernoulli-Kette erlaubt es uns, einen Bernoulli-Prozess einfach auszurechnen:

Definition:

$$P = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

- p ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis eintritt;
- n ist die Anzahl der Versuche (auch **Länge** der Bernoulli-Kette genannt);
- k ist die Anzahl der Treffer, die wir erzielen wollen;
- $P(X=k)$ sagt, dass wir die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer errechnen wollen

Wahrscheinlichkeit P(X = k) für genau k Treffer

Beispiel:
Multiple-Choice-Test: n Fragen, jeweils vier vorgegebene Antworten, von denen nur eine richtig ist.
Ein Kandidat kreuzt rein zufällig je eine Antwort an.

Trefferwahrscheinlichkeit: $p = \frac{1}{4}$;

Wahrscheinlichkeit für "Niete": $q = 1 - p = \frac{3}{4}$.

1) n = 3

Wahrscheinlichkeit P(X = 2) für genau zwei Treffer:
- Jeder Pfad hat die Wahrscheinlichkeit p^2q.
- Es gibt **3** Pfade, die zu $X = 2$ führen.
- Somit gilt: $P(X=2) = 3 \cdot p^2 \cdot q = \frac{9}{64}$.

2) n = 4

Wahrscheinlichkeit P(X = 2) für genau zwei Treffer:
- Jeder Pfad hat die Wahrscheinlichkeit p^2q^2.
- Es gibt **6** Pfade, die zu $X = 2$ führen.
- Somit gilt: $P(X=2) = 6 \cdot p^2 \cdot q^2 = \frac{27}{128}$.

3) Die Anzahl der Pfade mit zwei Treffern hängt von der Länge n der Bernoullikette ab:

Neue Schreibweise:

n = 3: $\binom{3}{2} = 3$ (lies "2 aus 3" oder "3 über 2")

n = 4: $\binom{4}{2} = 6$ (lies "2 aus 4" oder "4 über 2")

n = 3: $P(X=2) = \binom{3}{2} \cdot p^2 \cdot q = \frac{9}{64}$

n = 4: $P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot p^2 \cdot q^2 = \frac{27}{128}$

$\binom{n}{k}$ heißt **Binomialkoeffizient**

Bei einer Bernoulli-Kette der Länge **n** mit der Trefferwahrscheinlichkeit **p** lässt sich die **Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer** nach der **Bernoulli-Formel** berechnen:

$$\mathbf{P(X=k)} = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{Anzahl der Pfade mit k Treffern}} \cdot \underbrace{p^k \cdot q^{n-k}}_{\text{Wahrscheinlichkeit für einen Pfad mit k Treffern}} = B_{n;p}(k) \quad (q = 1 - p)$$

PDF ins INTERNET

setz der großen Zahlen liefert beispielsweise der Versicherungswirtschaft eine wahrscheinlichkeitstheoretische Vorhersage über den künftigen Schadenverlauf: Je größer die Zahl der im (Versicherungs-) Portfolio erfassten Personen oder Sachwerte, die von der gleichen Gefahr bedroht sind, desto geringer ist der Einfluss von Zufälligkeiten. Oder anders formuliert: Das *Gesetz der großen Zahlen* besagt, dass sich die relative Häufigkeit eines Zufallsergebnisses immer weiter an die theoretische *Wahrscheinlichkeit* für dieses Ergebnis annähert, je häufiger das Zufallsexperiment durchgeführt wird.

Das Gesetz der großen Zahl ermöglichte erstmals eine gesicherte mathematische berechnungsunbekannter Wahrscheinlichkeiten
aus den beobachteten relativen Häufigkeiten und wurde damit zurGrundlage der Statistik.

Das Gesetz des großen Zahlen lässt sich sehr einfach an einem Würfel erklären: Welche Augenzahl im Einzelfall gewürfelt wird ist immer zufällig. So kann die *Wahrscheinlichkeit*, dass eine Sechs gewürfelt wird, als ein Sechstel angegeben werden. Auf Dauer fällt jedoch jede Zahl gleich häufig. Bernoulli sagt nichts anderes, als dass sich die Treffer auf Dauer gleichmäßig verteilen. In seinem Werk "Ars conjectandi" beschreibt Bernoulli das "*Gesetz der großen Zahlen*" auf eine sehr anschauliche *Art*:

"[...] So sind zum Beispiel bei Würfeln die Zahlen der Fälle bekannt, denn es giebt für jeden einzelnen Würfel ebensoviele Fälle als er Flächen hat; alle diese Fälle sind auch gleich leicht möglich, da wegen der gleichen Gestalt aller Flächen und wegen des gleichmässig vertheilten Gewichtes des Würfels kein Grund dafür vorhanden ist, dass eine Würfelfläche leichter als eine andere fallen sollte, was der Fall sein würde, wenn die Würfelflächen verschiedene Gestalt besässen und ein Theil des Würfels aus schwererem Materiale angefertigt wäre als der andere Theil. So sind auch die Zahlen der Fälle für das Ziehen eines weissen oder eines schwarzen Steinchens aus einer Urne bekannt und können alle Steinchen auch gleich leicht gezogen werden, weil bekannt ist, wieviele Steinchen von jeder Art in der Urne vorhanden sind, und weil sich kein Grund augeben lässt, warum dieses oder jenes Steinchen leichter als irgend ein anderes gezogen werden sollte. […] Man muss vielmehr noch Weiteres in Betracht ziehen, woran vielleicht Niemand bisher auch nur gedacht hat. Es bleibt nämlich noch zu untersuchen, ob durch Vermehrung der Beobachtungen beständig auch die Wahrscheinlichkeit dafür wächst, dass die Zahl der günstigen zu der Zahl der ungünstigen Beobachtungen das wahre Verhältniss erreicht, und zwar in dem Maasse, dass diese Wahrscheinlichkeit schliesslich jeden beliebigen Grad der Gewissheit übertrifft, oder ob

PDF ins INTERNET

e Asymptote hat, d. h. ob ein bestimmter Grad der
Fälle gefunden zu haben, vorhanden ist, welcher auch bei beliebiger Vermehrung der Beobachtungen niemals überschritten werden kann, zum Beispiel dass wir niemals über 1/2, 2/3 oder 3/4, der Gewissheit hinaus Sicherheit erlangen können, das wahre Verhältniss der Fälle ermittelt zu haben. [...]"

Das Revolutionäre daran war, dass auch das scheinbar so Irrationale, Unkalkulierbare wie der Zufall exakten Gesetzen unterliegt und plötzlich berechenbar wird.

Beispiel

Würfel (1; 2; 3; 4; 5; 6)

p = 1/6

Würfe: - 10x 6 6 6 6 6 1 3 5 6 8

- 30x 5x6 25x andere Zahl
- 300x 50x6 250 x andere Zahl
- 3 Mio. x 1/6 x 6 5/6 x andere Zahl

→ Wahrscheinlichkeit gibt gewisse Sicherheit, pendelt sich ein, dass es fast zur Gewissheit wird, minimale Abweichungen. Grundlage jedes naturwissenschaftlichen Experiments, z.B. Wettervorhersage

PDF ins INTERNET

gen

Die Bedeutung Jakob Bernoullis Arbeiten für die Mathematik

Indem Bernoulli ähnlich wie vor ihm einige andere Mathematiker von der Untersuchung der Chancen bei Glücksspielen ausgingen, erweiterte und vertiefte er die Überlegungen zu einer allgemeinen mathematischen Theorie, und schloss weite neue Gebiete für die Anwendung ein. Damit war erstmals in der Geschichte der Wissenschaften der Neuzeit eine exakte Disziplin begründet worden, zu der es in der Antike keinerlei Vorläufer gab. Denn, obwohl bereits im Alten Orient das Spiel eine Leidenschaft war, hatte man nie theoretische Betrachtungen daran geknüpft. Erst Dante unternahm den (allerdings unrichtig durchgeführten) Versuch, Gesetzmäßigkeiten ,,im Zufall" aufzuspüren. Bernoulli aber schuf die festen Grundlagen, auf denen sich später die physikalische, die biologische, die medizinische und die soziale Wahrscheinlichkeitslehre aufbauten. Bernoulli glaubte, dass sich auch viele moralische Urteile seiner Lehre einfugen ließen. Als einer der ersten stellte er die Verbreitung der Krankheiten ausdrücklich in den Rahmen der Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen, indem er positiv behauptete, dass auch deren Auftreten und Verbreitung grundsätzlich sich statistisch berechnen ließe.

Vor Jakob Bernoulli war die Wahrscheinlichkeitsrechnung nur eine Lehre von den Chancen im Glücksspiel. Der Begriff Wahrscheinlichkeit wurde gelegentlich verwendet, aber der zentrale Begriff, um den sich alles drehte, war der Begriff „Wert eines Spieles“, das heißt Erwartungswert des Gewinnes. Jakob Bernoulli hat zuerst die Wichtigkeit des Wahrscheinlichkeitsbegriffes für das **gesamte menschliche Leben** erkannt. Er hat nicht nur Glücksspiele betrachtet, bei denen man Wahrscheinlichkeiten durch Auszählung von möglichen und günstigen Fällen apriori bestimmen kann, sondern er wandte die Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch auf Krankheiten und Todesfälle an, bei denen man nicht «gleichmögliche Fälle}) auszählen kann. Er hat zuerst die Frage untersucht, wie weit man Wahrscheinlichkeiten empirisch durch Beobachtung von Häufigkeiten bestimmen kann. Er gab in seiner Ars Conjectandi einen strengen Beweis des «Gesetzes der großen Zahlen» und wurde dadurch zum Begründer der mathematischen Statistik.

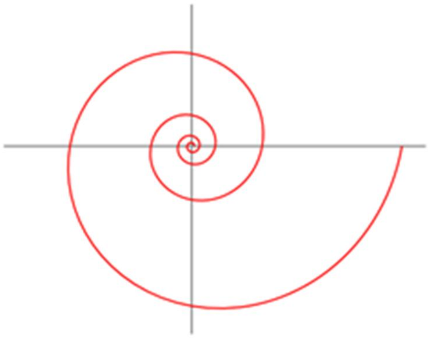
Er entdeckte eine generelle Methode zur Bestimmung der Evolute eines Graphen (= Kurve der Krümmungsmittelpunkte), untersuchte verschiedene Hüllkurven, insbesondere zu Parabeln, logarithmischen Spiralen und Epizykloiden, fand die Lemniskate und bewies die nach ihm benannte Bernoulli’sche Ungleichung.

Jakob I Bernoulli ahnte die Bedeutung seiner Entdeckungen. Am Schluss seiner Abhandlungen gab er tiefsten Meditationen Ausdruck: ,,Wenn also alle Ereignisse durch alle Ewigkeit hindurch fortgesetzt beobachtet würden (wodurch schließlich die Wahrscheinlichkeit in volle Gewissheit übergehen müsste), so würde man finden, dass alles in der Welt aus bestimmten Gründen und in bestimmter Gesetzmäßigkeit eintritt, dass wir

so zufällig erscheinenden Dingen eine gewisse
m anzunehmen".

Bernoulli und die logarithmische Spirale

„Verwandelt kehr ich als dieselbe wieder“



Bei der Lösung der Frage „Bei welcher Kurve wird jeder vom Ursprung ausgehende Strahl unter dem gleichen Winkel geschnitten?“ entdeckt Bernoulli die Logarithmische Spirale. Hierbei handelt es sich um eine Spirale, die mit jeder Umdrehung den Abstand von ihrem Mittelpunkt, dem Pol, um den gleichen Faktor vergrößert. In umgekehrter Drehrichtung schlingt sich die Kurve mit abnehmendem Radius immer enger um den Pol.
Jede Gerade durch den Pol schneidet die logarithmische Spirale stets unter dem gleichen Winkel. Wegen dieser Eigenschaft spricht man auch von einer gleichwinkligen Spirale.

Er ist von den Eigenschaften der spira mirabilis – auch nach zentrischer Streckung ergibt sich wieder eine Spirale dieses Typs - so begeistert, dass er sich die Kurve und den Spruch Resurgo eadem mutata (Verwandelt kehr' ich als dieselbe wieder) für seinen Grabstein wünscht, allerdings meißelt der Steinmetz in Unkenntnis des Unterschieds eine archimedische Spirale.

Schließlich fasst Jakob Bernoulli *Stochastik* nicht nur als Glücksspielrechnung, sondern als Kunst der Vermutung auf:

"[...] Wenn also alle Ereignisse durch alle Ewigkeit hindurch fortgesetzt beobachtet würden (wodurch schliesslich die Wahrscheinlichkeit in volle Gewissheit übergehen müsste), so würde man finden, dass Alles in der Welt aus bestimmten Gründen und in bestimmter Gesetzmässigkeit eintritt, dass wir also gezwungen werden, auch bei noch so zufällig erscheinenden

PDF ins INTERNET

nd sozusagen ein Fatum anzunehmen. Ich weiss nicht, om allgemeinen Kreislaufe der Dinge hinzielen wollte, in welcher er behauptet, dass Alles nach Verlauf von unzähligen Jahrhunderten in den ursprünglichen Zustand zurückkehrt. [...]"

Mit anderen Worten: Die scharfsinnige "Kunst des Vermutens" sollte dann eingesetzt werden, wenn unser Denken nicht mehr ausreicht, um uns die ausreichende Gewissheit bei einem zu Grunde liegenden Sachverhalt zu vermitteln.

Quellen

Bücher

Das große Tafelwerk, Cornelsen Verlag

Top im Abi, Abiwissen kompakt Mathematik, Schroedel Verlag

Mathematik, Analytische Geometrie/ Stochastik   Band 2 Cornelsen Verlag   Bigalke, Köhle

Internet

Enzyklopädie: **Wikipedia**   http://de.wikipedia.org/ (April, Mai 2015)

Internetrecherche:

http://www.berliner-zeitung.de/archiv/zum-250--todestag-des-mathematikers-johann-bernoulli-am-1--januar-mit-der-erfindung-des-unendlich-kleinen-die-neue-mathematik-erobert,10810590,9380128.html (19. April 2015)

http://www.schweizinfo.ch/39-meine-schweiz/erfindungen/179-jakob-bernoulli.html (19. April 2015)

https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~thaeter/anasem08/Bernoulli.pdf   (19. April 2015)

http://www.frustfrei-lernen.de/mathematik/bernoulli-experiment-kette.html   (19. April 2015)

PDF ins INTERNET

dermathematik/article1969347/Jakob-Bernoulli-und-

http://www.statistik.lmu.de/institut/ag/agmg/lehre/2012_WiSe/seminar_grundlagen/Endpr%C3%A4sentation%20-%20Bernoulli.pdf (25.April 2015)

http://matheguru.com/stochastik/164-bernoulli-kette.html (25. April 2015)

https://www.risknet.de/wissen/who-s-who/jakob-i-bernoulli/ (25. April 2015)

http://de.bettermarks.com/mathe-glossar/bernoulli-jakob-i.html (26. April 2015)

http://m.schuelerlexikon.de/ma_abi2011/Jakob_Bernoulli.htm (26. April 2015)

http://www.math-grain.de/download/m2/dgl/bernoulli-1a.pdf (26. April 2015)

http://www.uni-protokolle.de/Lexikon/Infinitesimalrechnung.html (3. Mai 2015)

http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/phbl.19550110804/pdf (19. Mai 2015)

http://www.spektrum.de/sixcms/media.php/924/august_2010_bernoulli.pdf (19. Mai 2015)

http://www.springer.com/us/book/9783764307134 (20.Mai 2015)

http://universal_lexikon.deacademic.com/213264/Bernoulli%3A_Eine_Mathematikerfamilie (20.Mai 2015)

http://www.f07.fh-koeln.de/imperia/md/content/personen/bold_christoph/bernoullijakob.pdf (20.Mai 2015)

http://www.elektronikinfo.de/grundlagen/integral.htm (21.Mai 2015)

http://www.elektronikinfo.de/grundlagen/differential.htm (21.Mai 2015)

http://brinkmann-du.de/mathe/gost/stoch_01_11.htm (21.Mai 2015)